Das Geheimnis von Ishango

Über die Helixstruktur der Primzahlen

Ein mathematisches Essay

9 | 9 | 19 Christof Born

«Das Schönste, was wir erleben können, ist das Geheimnisvolle.
Es ist das Grundgefühl, das an der Wiege von wahrer Kunst und Wissenschaft steht.»

Albert Einstein

«In der Wissenschaft brauchen wir vor allem Fantasie. Es geht nicht nur um Mathematik oder um Logik, sondern auch ein wenig um Schönheit und Poesie»

Maria Mitchell, Astronomin (1818–1889)

Mesopotamien vor 5500 Jahren. Uruk ist das grosse urbane Zentrum im Zweistromland und Zentrum der Entstehung der sumerischen Kultur. Gezählt wird hier mit Zählsteinen aus Ton. Für jedes Objekt gibt es einen spezifischen Zählstein, für ein Schaf etwa eine einfache Scheibe mit einem Kreuz darauf. Zum Zählen einer Schafherde wird die entsprechende Menge an Zählsteinen in einem Tongefäss aufbewahrt. Verschlossene Gefässe verhindern, dass Schafhirtin oder Schafbesitzerin die Anzahl Zählsteine heimlich ändern können. Um auch den Inhalt solcher verschlossenen Gefässe zu kennen, ritzt man die Muster der darin befindlichen Zählsteine zusätzlich auf die Oberfläche des Gefässes. So liegt es irgendwann nahe, auf Gefäss und Zählsteine zu verzichten und einfach die Muster der Zählsteine auf ein flaches Stück Ton zu ritzen – dies sind die Anfänge des Schreibens. Schon bald kommt man auch auf die Idee, anstelle von acht Schafsymbolen für acht Schafe je ein separates Symbol für die Zahl Acht und für das Schaf zu verwenden. Die Zahl hat sich damit von den Dingen befreit. Es ist die Geburtsstunde der abstrakten Mathematik, deren Entwicklungsgeschichte uns der französische Mathematiker Mickael Launay in seinem wunderbaren Buch «Der grosse Roman der Mathematik – Von den Anfängen bis heute» schildert.

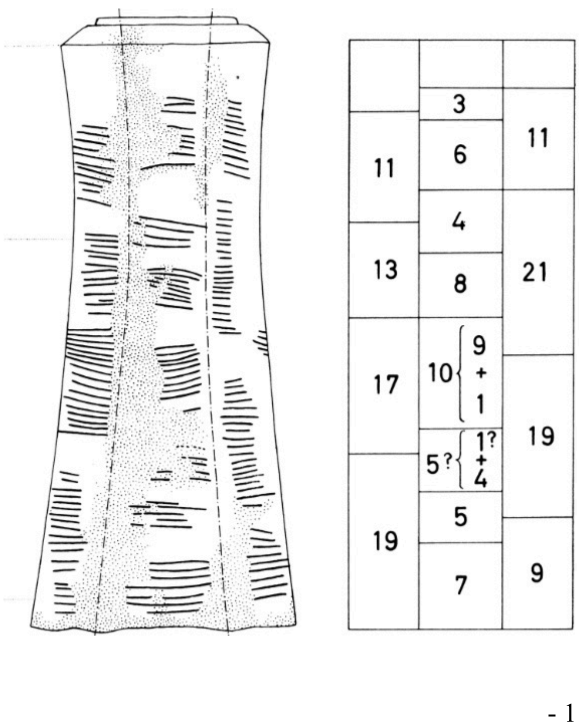
1. Die Knochen von Ishango

Blenden wir nun in die Altsteinzeit zurück. Das Dorf Ishango, am Ufer des Eduardsees im heutigen Kongo gelegen, wird nach einem Ausbruch des nahegelegenen Vulkans zugeschüttet. Hier führt der belgische Archäologe Jean de Heinzelin de Braucourt in den 1950er Jahren Ausgrabungen durch. Bei den Ausgrabungen des steinzeitlichen Wohnplatzes findet Heinzelin zwei 10 und 14 cm lange Knochen mit Gruppen von Einkerbungen, die als Zahlen interpretiert werden können und in ihrer Komplexität einmalig sind für die Altsteinzeit. Die Knochen befinden sich heute im Museum für Naturwissenschaften in Brüssel.

Die beiden Knochen, nach einer C14-Datierung rund 22’000 Jahre alt, sind in mehrfacher Hinsicht mysteriös. Der kürzere und bekanntere der beiden Knochen ist am Ende mit einem Quarz versehen und wird damit zu einem Gravurwerkzeug in einer Zeit und Kultur, die keine Schrift kannte. Es gibt verschiedene Versuche, die Zahlen auf diesem Knochen zu interpretieren. Alexander Marshack etwa deutet sie in seinem Werk «The Roots of Civilisation» als Mondkalender. Marshacks These wird unterstützt von der Mathematikerin Claudia Zaslavsky, die als Grund für die Zeitmessung im Rhythmus der Mondphasen den Menstruationszyklus der Frau anführt. Heinzelin selbst sieht in den Kerben eine Art von einfachen arithmetischen Spielen und Rechnereien. Und der Mathematiker Dirk Huylebrouck sowie der Physiker Vladimir Pletser vertreten zusammen die Hypothese, der Knochen habe als eine Art Rechenstab gedient. «Die Kerben im Knochen von Ishango besitzen unstreitbar eine Logik. Vielleicht hat in Ishango wirklich ein erstes Aufleuchten abstrakten Zahlen-Denkens stattgefunden», schreibt Huylebrouck in seinem aufschlussreichen Bericht im Spezial «Ethnomathematik 2/2006» von «Spektrum der Wissenschaft».

Betrachten wir nun den kürzeren der beiden Ishango-Knochen (Abb. 1 und 3D-Modell): Darauf befinden sich in der mittleren Spalte unten die beiden Zahlen 5 und 7, in der linken Spalte die Zahlen 11, 13, 17 und 19, also sechs Primzahlen in einer Folge. Diese Zahlen können aber anstatt als Primzahlen auch als 6, 12 und 18 plus/minus 1 interpretiert werden und damit im Zusammenhang mit einem bestimmten Zahlensystem auf der Basis der Zahl 6 stehen. «Es gibt keinerlei Indiz dafür, dass die unbekannten Bearbeiter des Knochens von Ishango für Primzahlen ein besonderes Interesse aufgebracht hätten», meint Huylebrouck.

Abb. 1 und Titelbild. Der kürzere der beiden Knochen mit den Primzahlen von 5 bis 19 in der mittleren und linken Spalte. Das Titelbild zeigt den Knochen von vier verschiedenen Seiten. Fotos Royal Belgian Institute of Natural Sciences



Empfohlen sei hier das ausgezeichnete Spezial «Ethnomathematik 2/2006» von «Spektrum der Wissenschaft» sowie das neu erschienene Buch «Africa and Mathematics – From Colonial Findings Back to the Ishango Rods» von Dirk Huylebrouck über Ethnomathematik in Zentralafrika (aus der Reihe «Mathematics, Culture, and the Arts», Springer Nature Switzerland, 2019).

2. Primzahlen – Atome der Mathematik

Nach dem heutigen Stand des Wissens haben sich erst die Chinesinnen und Griechinnen im 1. Jahrtausend vor Christus mit den Primzahlen beschäftigt, und Euklid bewies um 300 v. Chr., dass es unendlich viele davon gibt. Dann war 2000 Jahre Funkstille, das heisst, es gab keine tiefgreifenden Erkenntnisse zu den Primzahlen. Bis im Jahr 1792 in Deutschland ein 15-jähriger Junge Namens Carl Friedrich Gauss entdeckte, dass sich die Anzahl der Primzahlen durch eine Logarithmusfunktion ausdrücken lässt. Anhand des Studiums von Primzahltabellen hatte Gauss bemerkt, dass es immer weniger Primzahlen gibt, je weiter wir in der Folge der natürlichen Zahlen voranschreiten, und dass sich die Menge der Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl x, zum Beispiel zwischen 0 und 1000, mit der Formel x / ln(x) ziemlich genau berechnen lässt. Mit immer grösserem x wird die Berechnung immer genauer. Diese als Primzahlsatz bekannte Formel gilt als eine der wichtigsten in der Geschichte der Mathematik, und sie konnte erst ein Jahrhundert später unabhängig von Hadamard und Vallée Poussin bewiesen werden.

Ein weiterer Durchbruch gelang Bernhard Riemann, einem Schüler von Gauss, der vermutete, dass die Nullstellen der Zetafunktion

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots$$

in der komplexen Zahlenebene alle auf einer Geraden liegen, und dabei erkannte, dass diese Nullstellen in direktem Zusammenhang mit der Verteilung der Primzahlen stehen. Den Beweis dieser Vermutung setzte der deutsche Mathematiker David Hilbert in seiner denkwürdigen Rede am Internationalen Mathematiker-Kongress im Jahr 1900 in Paris auf die Liste der 23 grössten mathematischen Probleme. Die Vermutung gilt auch heute noch als eines der wichtigsten ungelösten Probleme und gehört zu den sieben Problemen, für deren Lösung der Geschäftsmann Landon T. Clay aus Boston im Jahr 2000 ein Preisgeld von je einer Million US-Dollar zur Verfügung stellte. Eines dieser Probleme, die Poincaré-Vermutung, hat der herausragende russische Mathematiker Grigori Perelman im Jahr 2002 gelöst, jedoch verzichtete er auf das Preisgeld. Die Poincaré-Vermutung hängt mit dem Poincaré-Dodekaeder zusammen, den wir später noch kennenlernen werden.

Abb. 2. «Die Mathematiker haben sich bis jetzt vergeblich bemüht, irgendeine Ordnung in der Folge der Primzahlen zu entdecken, und man ist geneigt zu glauben, dies sei ein Geheimnis, das der menschliche Geist niemals durchdringen wird». Leonhard Euler auf der ehemaligen schweizerischen 10-Franken-Banknote. Foto sb

Einen wichtigen Beitrag zu den Primzahlen leistete auch der in Basel geborene Leonhard Euler, einer der grössten und produktivsten Mathematiker aller Zeiten. Mit $e^{i\pi} + 1 = 0$ fand der Schweizer den wohl schönsten Ausdruck der Mathematik, welcher fünf fundamentale Konstanten miteinander verbindet. Euler bewies, dass die aus den Kehrwerten der Primzahlen gebildete Reihe gegen unendlich divergiert. Und es gelang ihm, die Zetafunktion als unendliches Produkt über alle Primzahlen darzustellen. Dieses sogenannte Eulerprodukt verbindet also die Zetafunktion mit den Primzahlen, und wir begegnen ihm wieder im nächsten Kapitel. Leonhard Euler war jedoch pessimistisch in Bezug auf die Fähigkeit des Menschen, die Ordnung hinter den Primzahlen zu erkennen (siehe dazu seine Aussage in der Legende zu Abb. 2). Was natürlich nicht bedeutet, dass es diese Ordnung nicht gibt. Die schöpferische Fantasie des Menschen erschöpft sich eher als die Natur selbst, wie es der französische Mathematiker Blaise Pascal so tiefsinnig formulierte: «L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir.»

Primzahlen sind die Atome der Mathematik. Gemäss dem Fundamentalsatz der Arithmetik, der ebenfalls auf Euklid zurückgeht, kann jede natürliche Zahl auf eindeutige Weise als ein Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Können und wollen wir glauben, dass diese fundamentalen Zahlen einfach zufällig verteilt sind? Ein anderes Beispiel aus der Welt der Physik: Gibt es eine Formel zur Berechnung der Zahlen 656, 486, 434, 410 und 397, den Wellenlängen des Wasserstoffatoms? Der Schweizer Schreib- und Rechenlehrer Johann Jakob Balmer war zutiefst davon überzeugt, dass sich hinter diesen scheinbar zufälligen Zahlen ein mathematisches Muster verbirgt. Am 25. Juni 1884 stellte er, schon fast 60-jährig, vor der Naturforschenden Gesellschaft in Basel die gleichermassen einfache wie schöne Formel

$$\lambda = A \times m^2 / (m^2 - 2^2)$$

zur Berechnung dieser Zahlen vor, und er lieferte damit die Grundlage für das Atommodel von Niels Bohr. Balmer gelang dank «seinem unbeirrbaren Glauben an die prinzipielle Einfachheit der Naturgesetze das, was Einstein einmal metaphorisch den Blick in die Karten Gottes genannt hat», wie Rudolf Taschner in seinem Buch «Der Zahlen gigantische Schatten» schreibt. Auf der Suche nach der Struktur der Primzahlen waren mir Johann Jakob Balmer sowie der chinesische Mathematiker Yitang Zhang immer Leuchttürme in einem unendlichen Meer des Zweifels.

Auch wenn die Primzahlen scheinbar völlig willkürlich verteilt erscheinen, so gibt es doch einige Hinweise darauf, dass die Verteilung nicht zufällig ist. Dazu gehört etwa die nicht zufällige Verteilung der Endziffern von Primzahlen, wie die Arbeiten von Soundararajan und Lemke Oliver von der Stanford University zeigen. Auch die Ulam-Spirale hat «einen Hauch von Fantasie in Spekulationen um die geheimnisvolle Verbindung von Ordnung und Zufall bei der Primzahlverteilung gebracht», wie der legendäre Wissenschaftsjournalist Martin Gardner einst schrieb. Von den Fraktalen wissen wir: Trotz ihrer scheinbaren Komplexität und Zufälligkeit werden diese oft von sehr einfachen Regeln erzeugt, die in aufeinanderfolgenden Schleifen immer wieder angewendet werden (mehr dazu in «Die fraktale Geometrie der Natur» von Benoît B. Mandelbrot). Halten wir uns deshalb vorerst an Spinoza: «Nichts in der Natur ist zufällig. Etwas erscheint nur zufällig aufgrund der Unvollständigkeit unseres Wissens.»

Die umfassend und spannend erzählte Geschichte der Primzahlen findet man in «Die Musik der Primzahlen – Auf den Spuren des grössten Rätsels der Mathematik» von Marcus du Sautoy.

3. Der das Unendliche kannte

Die Suche nach Mustern ist tief in unserer Evolution verankert. «Intelligenz liebt Muster und scheut vor dem Zufälligen zurück», meinte einst Douglas Hofstadter, dem wir später wieder begegnen werden. Finden wir solche Muster vielleicht auch auf den Ishango-Knochen? Könnten mit der Einkerbung der Zahlenfolge 5, 7, 11, 13, 17, 19 tatsächlich die Primzahlen gemeint sein, und verraten uns die weiteren Einkerbungen mehr über die Struktur der Primzahlen? Interessant ist die Spalte mit den Einkerbungen 11, 21, 19 und 9 auf dem gleichen Knochen wie die sechs Primzahlen. Diese könnten auch als Beginn einer Zahlenfolge oder als Darstellung von Quadraten gelesen werden:

11, 21, 31, 41... | 9, 19, 29, 39...

$11^2 - 21 = 100 = 19 + 9^2$

Abb. 3. Ramanujan, der Künstler unter den Mathematikern, fand eine aussergewöhnliche Formel für π, wunderbar beschrieben von Florian Freistetter in seiner Kolumne Freistetters Formelwelt in «Spektrum der Wissenschaft». Foto G.H. Hardy

Tatsächlich werden sich beide Interpretationen bei unseren Erkundigungen als sehr nützlich erweisen. Gibt es vielleicht einen Zusammenhang zwischen den Primzahlen und den beiden Zahlen 9 und 11 beziehungsweise 9^2 und 11^2? Um dieser Frage nachzugehen reisen wir ins indische Erode, eine Stadt südwestlich von Madras. Hier wurde im Jahr 1887 am neunten Tag des neunten indischen Monats Margarisha der so aussergewöhnliche wie geniale Mathematiker Srinivasa Ramanujan geboren. Ramanujan war ein Meister der unendlichen Reihen und Kettenbrüche. «Es wird berichtet, dass er sich die Zahlen als Kettenbrüche vorstellte und dass dies zumindest teilweise eine Erklärung für seine erstaunlichen Ergebnisse sei», schreibt Jean-Paul Delahaye in «π – die Story». Auch mit Primzahlen beschäftigte sich Ramanujan intensiv, und er wollte wie viele Mathematikerinnen die magische Formel für deren Berechnung finden. Ramanujan ersann in seinem Leben eine grosse Anzahl von phantastischen Formeln, darunter jene, mit der man π sehr effizient berechnen kann (jeder Berechnungsdurchgang liefert exakt acht weitere Dezimalstellen). Der Hauptterm dieser mysteriösen Formel lautet $9801 / 2\sqrt{2}$ beziehungsweise $(9^2 x 11^2) / \sqrt{8}$. Wir finden hier also einen Zusammenhang zwischen π und den beiden Quadraten 9^2 und 11^2.

Seit dem 18. Jahrhundert wissen wir, dass es auch einen Zusammenhang gibt zwischen π und der bereits erwähnten Zetafunktion, da in vielen Funktionswerten die Zahl π vorkommt, beispielsweise beträgt $\zeta(2) = \pi^2/6$. Diesen schönen Wert fand Leonhard Euler 1735, dreissig Jahre nachdem sich die beiden ebenfalls aus Basel stammenden Gebrüder Jakob und Johann Bernoulli intensiv, aber vergeblich um eine Lösung bemüht hatten (weshalb dieses Problem auch als «Basler Problem» bekannt ist). Die Schweizer Familie Bernoulli hat über Generationen hinweg herausragende Mathematiker hervorgebracht und den Lehrstuhl der Universität Basel über den Zeitraum von 105 Jahren besetzt. «Wenn wir die Bernoullis mit der Familie Bach verglichen hatten, dann ist Leonhard Euler unstreitig der Mozart der Mathematik», meint Eli Maor in «Die Zahl e». Zu den überragenden Persönlichkeiten der Schweizer Mathematik gehört auch der leider fast vergessene Uhrmacher, Astronom und Mathematiker Jost Bürgi, einer der Entdecker der Logarithmen.

Wir können zusammenfassen: Die beiden Produkte 9^2 und 11^2 hängen mit der Zahl π zusammen (Formel von Ramanujan), π findet sich in den Funktionswerten der Zetafunktion (Euler). Und die Zetafunktion führt uns zu den Primzahlen (über deren Nullstellen oder das Eulerprodukt). Etwas kreativ können wir dies schreiben als

$$9^2 \mid 11^2 = \pi = \text{Zeta} = \text{Prim}$$

Wobei wir die Gleichheitszeichen als Brücken verstehen. Dank den Formeln von Ramanujan und Euler können wir also von den Produkten 9^2 und 11^2 eine Brücke bauen zu den Primzahlen und zwischen diesen beiden Themen – wie auf dem kurzen Ishango-Knochen dargestellt – einen mathematischen Zusammenhang vermuten. Für mich war dieser spekulative Brückenschlag Ausgangspunkt und Motivation, mich drei Jahre lang mit den Ishango-Knochen auseinanderzusetzen.

Vergessen wir also für kurze Zeit all unser Wissen über die Geschichte der Zahlen. Nehmen wir an, bei den Ishango-Knochen handelt es sich um den zeitlosen heiligen Gral der Mathematik und machen uns frohen Mutes auf die Suche nach der Primzahlformel. Eine Suche im Sinne von Marcus de Sautoy: «Vielleicht haben wir die Primzahlen auch nur zu lange aus der Perspektive von Gauss und Riemann betrachtet, und wir sollten eher nach einer anderen Möglichkeit suchen, diese geheimnisvollen Zahlen zu verstehen.» Und natürlich auch eine Suche ohne Angst vor Irrtum: «Tatsächlich kommt man der Wahrheit nur durch das Scheitern näher», meinte einst der grosse Alberto Giacometti. Und wir halten uns auch an den Astrophysiker Avi Loeb: «Deciding what's likely ahead of time limits the possibilities.»

Zum Schluss dieses Kapitels eine weitere Literaturempfehlung. Wie Ramanujan arbeitete und wie er seine so inspirierenden wie abenteuerlichen Formeln fand, bleibt ein Mysterium. Er selbst erzählte, dass seine Familiengöttin Namagiri ihn in seinen Träumen inspiriere, und er war unermüdlich metaphysischen Spekulationen zugewandt. Auf die Spuren dieses geheimnisvollen Genies macht sich Robert Kanigel in seinem Buch «Der das Unendliche kannte. Das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan». Sehenswert ist auch der Dokumentarfilm «Letters from an Indian Clerk» und der bewegende Spielfilm «The Man Who Knew Infinity» von Matthew Brown.

4. Das doppelte Lottchen

Die meisten Berichte und Interpretationen über den Fund bei Ishango beruhen auf dem kürzeren der beiden Knochen, jener mit den Primzahlen. Der zweite Knochen war vielen Autorinnen nicht bekannt, da Heinzelin diesen Fund erst vierzig Jahre nach den Ausgrabungen, kurz vor seinem Tod, bekannt machte. Die beiden Knochen, auch Ishango Bone I und Ishango Bone II genannt, können jedoch nur zusammen verstanden werden. Der erste, kürzere mit den Primzahlen, zeigt uns die Zutaten des «Rezeptes» und was wir damit kochen können, nämlich die Primzahlen. Auf dem zweiten Knochen erfahren wir, in welcher Art wir diese Zutaten verwenden sollen.

Schauen wir uns zuerst den kürzeren Knochen an (Abb. 1). In der mittleren Spalte findet man oben die Zahlenpaare 3 und 6 sowie 4 und 8, die summiert auch als 9 und 12 gelesen werden können. Die beiden folgenden Einkerbungen wurden als 10 und 5 interpretiert. Effektiv handelt es sich jedoch bei der 10 um neun Striche und davon abgesetzt einen deutlich kürzeren (was als 9 x 10 = 90 verstanden werden kann) sowie bei der folgenden Zahl nur um 4 Striche. Der fünfte, mit einem Fragezeichen versehene Strich wurde einfach dazu gedacht, um das Prinzip der Verdoppelung der vier ersten Zahlen beizubehalten. Aus der Multiplikation dieser Zahlen erhalten wir

36 = 3 x 12 oder 4 x 9
72 = 6 x 12 oder 8 x 9
108 = 9 x 12
360 = 4 x 90

Die so erhaltenen Zahlen haben als Winkel der beiden Goldenen Dreiecke eine fundamentale Bedeutung, und wir können damit, wie wir gleich sehen werden, die zuunterst in der Spalte aufgeführten Primzahlen 5 und 7 berechnen. Ich bezeichne diesen Teil des Knochens als Section d'Or in Anlehnung an die gleichnamige Künstlergemeinschaft des Kubismus, die sich intensiv mit dem Goldenen Schnitt und der vierten Dimension auseinandergesetzt hat. Wir wechseln nun zum längeren der beiden Knochen (Abb. 4, 3D-Modell) und betrachten die ersten drei Spalten mit 20 Kerben (davon sechs kurze), 6 Kerben und 18 Kerben. Wir multiplizieren diese, wobei wir Zahlen mit zwei nah beieinanderliegenden Strichen zweimal verwenden. Dies ergibt wiederum die Zahlen der «Section d'Or»:

36 = 6 x 6
108 = 6 x 18
360 = 18 x 20

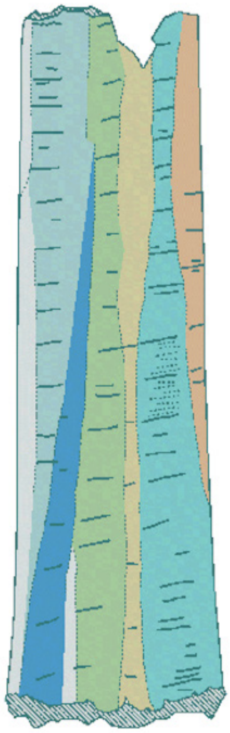


Abb. 4. Die sechs rund um den Knochen angeordneten Spalten des langen Ishango-Knochens nebeneinander aufgezeichnet (in der ersten Spalte ging bei der Zeichnung ein kurzer Strich vergessen). Foto Royal Belgian Institute of Natural Sciences

Auf diesem Knochen erfahren wir nun zusätzlich, was wir mit den Zahlen anstellen sollen. Schon Heinzelin vermutete, dass die kurzen Striche Subtraktion oder Division bedeuten könnten. Zudem gehören Zahlen im unteren Teil des Knochens in den Nenner. Wir erhalten so die beiden schönen Formeln für die gesuchten Primzahlen:

$$5 = 360 / (108 - 36)$$
$$7 = (360 - 108) / 36$$

Nun kürzen wir Zähler und Nenner mit 9:

$$5 = 40 / (12 - 4)$$
$$7 = (40 - 12) / 4$$

Nicht leicht zu erkennen ist der Zusammenhang zwischen den beiden Zahlen 12 und 4 sowie den beiden Primzahlen: $12 = 5 + 7$ und $4 = 5 - 1$. Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir

$$40 = 5 \times (7 + 1)$$

Das heisst, die Zahl 40 definiert die beiden Primzahlen 5 und 7. Ich nenne diese beiden zusammengehörenden Primzahlen das <u>Doppelte Lottchen</u> nach dem Roman von Erich Kästner, in dem zwei voneinander getrennte Zwillinge wieder zusammenfinden. Wenn wir nun die Zahl 40 kennen, nicht aber die beiden Primzahlen, haben wir die Gleichung $40 = x\ (y + 1)$ mit zwei Unbekannten. Die gesuchten Primzahlen 5 und 7, welche diese Gleichung lösen, können wir analytisch nicht bestimmen. Sie lassen sich jedoch leicht finden, indem wir die Zahl 40 faktorisieren oder ausgehend von $\sqrt{40}$ nach der ersten ganzzahligen Lösung suchen. Wir können also vermuten, dass immer zwei Primzahlen durch eine Zahl, ich bezeichne sie im Folgenden als Ordnungszahl, definiert sind. Das heisst, die weiteren Ordnungszahlen, die wir finden müssen sind

$$154 = 11 \times (13 + 1)$$
$$340 = 17 \times (19 + 1)$$
$$690 = 23 \times (29 + 1)$$
$$1178 = 31 \times (37 + 1)$$
$$\vdots$$

Wenn wir eine Formel zur Berechnung dieser Ordnungszahlen finden, dann haben wir eine Struktur, die den einzelnen Primzahlen sehr nahekommt und zeigt, dass diese sehr viel weniger zufällig verteilt sind, als wir es bisher annahmen.

5. Die Primzahlkonstante

Wir konnten mit den Zahlen der drei ersten Spalten des längeren Knochens die ersten beiden Primzahlen 5 und 7 und damit das erste Doppelte Lottchen berechnen. Zufall? Wohl kaum, wenn wir uns die fünfte Spalte mit den 31 Kerben anschauen. In der Abbildung 4 können wir leider nicht erkennen, dass es breite und schmale Kerben gibt. Heinzelin hat uns aber diese schmalen Kerben genau beschrieben: Fünf davon befinden sich in der oberen Hälfte und sieben in der unteren Hälfte. Die ersten beiden Primzahlen, die wir berechnet haben, werden hier also für die weitere Rechnung verwendet. Die Ausgangszahl sind die 19 breiten Kerben, man addiert die 5 und 7 schmalen Kerben und erhält so die 31 Kerben der fünften Spalte:

$$19 + 5 + 7 = 31$$

Zusätzlich befindet sich in der Mitte der fünften Spalte eine Schar von 13 weiteren, kaum sichtbaren Kerben. Es gibt folgende Möglichkeit, diese Zahl zu berechnen:

$$13 = \frac{31x9-19}{20} = \frac{260}{20}$$

Mehr zur Struktur dieser Formel im nächsten Kapitel über die Doppelhelix. Im Moment ist für uns nur interessant, dass sich die Zahl 13 mit Hilfe der Zahl 31 und damit unter Verwendung der beiden vorausgegangenen Primzahlen 5 und 7 berechnen lässt. Führt uns diese Zahl 13 vielleicht weiter zur nächsten Ordnungszahl 154, welche die beiden Primzahlen 11 und 13 definiert? Wir finden auf dem langen Knochen tatsächlich alle Elemente einer Konstante P, die mit 13 multipliziert die Ordnungszahl 154 ergibt:

$$P = \frac{8}{6}\pi\sqrt{8} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{8}$$

Wo finden wir diese Zahlen? Wegen den beiden nahe beieinanderliegenden Kerben verwenden wir die Spalte ganz rechts zweimal, einmal als 8 und einmal als √8 (die Wurzel wird sehr schön dargestellt durch die beiden eingekürzten Striche). Für die Division mit 6 stehen die 6 Kerben unten in der vierten Spalte. Wo aber finden wir π? Eine der 31 Kerben der fünften Spalte liegt mitten in der Schar der 13 Kerben. Das heisst, wir können die Gesamtzahl aller 44 Kerben dieser Spalte durch diese 14 Kerben teilen und erhalten damit π. Der Bruch 44/14 beziehungsweise 22/7 war schon den Griechen als Annäherung für π bekannt. Archimedes berechnete mit der Exhaustionsmethode den Wert von π mit grösser als 223/71 und kleiner als 22/7. Wenn wir nun 8/6 zu 4/3 kürzen, erkennen wir die Formel für das Volumen der Kugel, das heisst, die Primzahlkonstante entspricht dem Volumen einer Kugel mit dem Radius √2. Nebenbei: Ich vermute, 10 / P = 0.844046... ist der beste Wert für das Lebesgue's universal covering problem, also 10 dividiert durch die Primzahlkonstante.

Wir können die Herleitung dieser Konstante als abenteuerlich bezeichnen, aber das Resultat ist schön. «Das entscheidende Kriterium ist Schönheit: für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz», schrieb einst der englische Mathematiker Godfrey Harold Hardy, der schon als Kind in der Kirche Liednummern in Primzahlen zerlegte und später als Mentor von Srinivasa Ramanujan bekannt wurde. Zusammengefasst: Mit Hilfe der ersten beiden Primzahlen 5 und 7 können wir die Zahl 13 berechnen, die multipliziert mit der Primzahlkonstante die Ordnungszahl 154 ergibt, jene Ordnungszahl, welche die beiden nächsten Primzahlen 11 und 13 definiert. Bei der Suche nach der Formel für die Berechnung der Ordnungszahlen müssen wir also berücksichtigen, dass wir diese jeweils durch die Multiplikation mit einer Konstante erhalten. Für die ersten vier Ordnungszahlen ergeben sich somit die folgenden gesuchten Werte

$$13 \times P = 154 = 11 \times (13 + 1)$$
$$28.7 \times P = 340 = 17 \times (19 + 1)$$
$$58.24 \times P = 690 = 23 \times (29 + 1)$$
$$99.43 \times P = 1178 = 31 \times (37 + 1)$$

6. Die Primzahl-Doppelhelix

«Immer dann, wenn wir uns durch die Stufen eines hierarchischen Systems nach oben oder unten bewegen und uns dann unerwartet wieder genau an unserem Ausgangspunkt befinden»: So beschrieb Douglas R. Hofstadter in seinem meisterhaften und mit dem Pulitzer-Preis ausgezeichneten Werk «Gödel, Escher, Bach – ein endloses geflochtenes Band» den von ihm eingeführten Begriff der «Seltsamen Schleife». Es sind solche selbstbezüglichen Schleifen, die es einem System ermöglichen, sich selbst wahrzunehmen, selbst-bewusst zu werden. Seltsame Schleifen sind der Kern unseres Bewusstseins. Hofstadters Buch ist der Versuch zu erklären, wie beseelte Wesen aus unbeseelter Materie entstehen können. Ausgehend von der DNS-Doppelhelix zeigt Hofstadter die – in seinen Worten fast mystischen – Analogien zwischen den «Seltsamen Schleifen» der Molekularbiologie und der Mathematischen Logik (Analogien, die nach meinem Empfinden homologer Natur sind, da die Biologie in der Mathematik gründet). Hofstadter erkannte insbesondere die grosse Bedeutung von rekursiven Systemen und meinte, dass «auf geeignete Weise komplizierte rekursive Systeme stark genug sein könnten, um aus vorgegebenen Mustern auszubrechen» und damit eine Grundlage seien für die Entwicklung von Bewusstsein und Intelligenz.

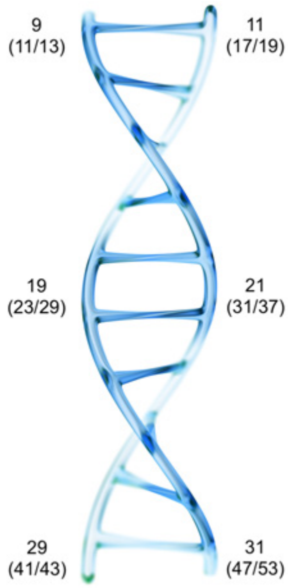


Abb. 5. Die beiden Helixstränge mit den Knoten 9, 21, 29... und 11, 19, 31... sowie den dazugehörigen Primzahlpaaren, den Doppelten Lottchen. Die mathematische Struktur dieser Doppelhelix ist im Anhang skizziert. Foto iStock.com/laremenko

Wie wir gesehen haben, können wir die Zahlenfolge 11, 21, 19, 9 auf dem kurzen Ishango-Knochen auch als Leiter verstehen mit den beiden Holmen 9, 19, 29, 39... und 11, 21, 31, 41... Beim Lesen von Douglas Hofstadters Analogien von Molekularbiologie und Mathematik kam mir die Idee, dass mit dieser Zahlenfolge auch eine Doppelhelix gemeint sein kann wie in Abb. 5 dargestellt. Mit der Zahl 9, dem ersten Knoten dieser Doppelhelix, lässt sich auch die erste Ordnungszahl 154 der beiden Primzahlen 11 und 13 berechnen:

$$\frac{31x9-19}{20} \times P = 154 = 11 \times (13 + 1)$$

Tatsächlich lassen sich auch alle weiteren Ordnungszahlen nach diesem Muster berechnen. Ich habe die Primzahl-Doppelhelix als Anhang zu diesem Text skizziert, damit die Zusammenhänge sichtbar werden. Für die ersten beiden Ordnungszahlen 154 und 340 stimmen die Formeln. Für die nächsten beiden braucht es eine Korrektur K, die wir mit Hilfe der vorausgehenden Knoten auf dem Helixstrang berechnen können (was die Annahme einer Helixstruktur bestätigt):

$K_1 \;=\; 31^2 + (9^2 - 11^2) \;/\; 0 + 13$
$K_2 \;=\; 55^2 + (11^2 - 9^2) \;/\; 13 + 28.7$

Hier begegnen wir interessanterweise auch wieder den beiden Quadratzahlen 9^2 und 11^2. Durch die «Symmetrie» haben diese beiden Formeln eine gewisse Plausibilität, da sich Symmetrie kaum zufällig ergibt. Damit haben wir ein exaktes Modell für alle Primzahlen bis 37. Wie berechnen sich nun die weiteren Korrekturen? Noch bleibt die letzte Tür zum Reich der Primzahlen verschlossen. Wer öffnet sie?

7. Gavrinis – Mathematik in Stein

Betrachten wir nun nochmals die dritte Spalte des kurzen Ishango-Knochens mit der Zahlenfolge 11, 21, 19, 9, die ebenso geheimnisvoll erscheint wie die «Section d'Or». Wir haben bereits eine mögliche Leseart kennengelernt: die vier Zahlen bilden die ersten beiden Paare der Primzahl-Doppelhelix (Abb. 5). Hier nun zwei weitere mögliche Lesearten:

$19/9 \;=\; 2.1\overline{11}$
$21/11 \;=\; 1.9\overline{09}$

$9/19 \;=\; 0.4736...$
$11/21 \;=\; 0.5238...$

Zur ersten Leseart und ohne es überprüfen zu können: Vermutlich gibt es keine weiteren Zahlenpaare, die sich gegenseitig auf diese schöne Art erschaffen. Interessant sind aber vor allem die umgekehrten Brüche 9/19 und 11/21 mit den beiden Werten von etwa 0.4736 und 0.5238. Auch diese hängen auf eine überraschende, geometrische Art zusammen: Überall auf dem Breitengrad 47°36' beträgt der Azimut der Sonne beim Sonnenaufgang am Tag der Sommersonnenwende 52°38'. Sommer- und Wintersonnenwende hatten bei den Megalithkulturen eine wichtige Bedeutung. Auch Gavrinis, eines der bedeutendsten Megalithbauwerke Europas, ist auf den Sonnenaufgang am Tag der Wintersonnenwende ausgerichtet. Und Gavrinis liegt auf dem Breitengrad 47°34', was beinahe dem Wert von 9/19 entspricht.

Gavrinis ist eine kleine Insel in der Bretagne. Das gleichnamige Megalithbauwerk auf der Insel besteht aus einem 13 Meter langen Gang, der aus 52 grossen Steinen gebaut ist und von einem runden, 50 Meter breiten und 8 Meter hohen Hügel überdeckt ist. Die wellenartige Ornamentik der Steine ist von einer überirdischen Schönheit und in dieser Ausprägung einzigartig für die Megalithzeit. Der Gang führt zu einer kleinen, von sechs Steinen gebildeten Kammer, deren Deckstein 17 Tonnen wiegt. Die Anlage ist etwa 6000 Jahre alt. In dieser Zeit lag der Wasserspiegel fünf Meter tiefer, die Anlage war also noch Teil des Festlandes. Obwohl Gavrinis auch als Ganggrab bezeichnet wird, gibt es bisher keinerlei Hinweise auf Bestattungen. Diskutiert wird daher die Verwendung der Anlage als Kult- und Versammlungsstätte. Wurde das Megalithbauwerk zufällig auf dem Breitengrad 47°34' erbaut, oder verweist uns dieser Breitengrad und der dazugehörige Azimut der Sommersonnenwende auf die Zahlenpaare 9/19 und 11/21 und damit auf die Bausteine der Primzahl-Doppelhelix? Gibt es beim Bauwerk vielleicht weitere Hinweise auf die Primzahlen? Die Ordnungszahl 154 berechnet sich, wie wir oben gesehen haben, mit 13 mal die Primzahlkonstante P, was auch geschrieben werden kann als

$$13 \text{ x } 4 \text{ x } 2\pi\frac{\sqrt{8}}{6} \;=\; 52 \text{ x } 2\pi\frac{\sqrt{8}}{6}$$

Gavrinis ist aus 52 Steinen gebaut und von einem kreisförmigen Hügel (2π) überdeckt. Sechs Steine bilden die innere Kammer und auf dem 8. Stein des Ganges ist die Wurzel aus 8 auf eine fast schon metaphysisch schöne Art und Weise dargestellt. Sehr interessant sind auch die verschiedenen Steinäxte, markante Markierungen auf einigen Steinen, die sich von den sphärischen Wellenmustern deutlich abheben. Auf der 21. Steinplatte (im Gegenuhrzeigersinn gezählt) hat es 18 solcher Äxte. Bis zu diesem Stein sind es somit 20 Steine insgesamt, davon begrenzen sechs die Kammer, von welchen wiederum zwei etwas grössere den Abschluss des Ganges bilden. Dies ergibt

360 = 18 Äxte x 20
108 = 18 Äxte x 6
36 = 18 Äxte x 2

und damit die Zahlen der «Section d'Or» auf dem Ishango-Knochen. Und auch die vier Steinäxte auf der 10. Steinplatte führen uns zu den Primzahlen: 4 x 10 ist die Differenz der beiden Quadratzahlen 9^2 und 11^2. Schon der bretonische Schriftsteller und Druide Gwenc'hlan Le Scouëzec, geboren am 11.11. im Jahr 1929, hat in seinem Buch «Bretagne Mégalithique» eine Vielzahl von mathematischen Spekulationen zu Gavrinis formuliert, jedoch keinen Zusammenhang zu den Primzahlen hergestellt. Am gleichen Tag wie Le Scouëzec wurde auch Hans Magnus Enzensberger geboren, der den sehr schönen Text «Zugbrücke ausser Betrieb. Die Mathematik im Jenseits der Kultur» geschrieben hat.

Die Zahlen 13 x 4 x 2π beziehungsweise 52 x 2π finden wir auch in der Kultur der Mayas. Die sogenannte Kalenderrunde des Mayakalenders beträgt 18’980 Tage. Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache von Sonnen-Kalender mit 52 Jahren à 365 Tagen (52 x 2π) und Ritualkalender mit 73 Jahren à 260 Tagen. Der Ritualkalender hat 13 Monate à 20 Tage; mit 260 / 20 berechneten wir weiter oben die Zahl 13 der Primzahl-Doppelhelix. Faszinierend ist der «Danca del Volador», ein zeremonieller Tanz der Maya und anderer indigener Völker Mittelamerikas, bei dem vier Männer an Seilen in 13 Kreisen von einer hohen Stange zum Boden schweben. Poetischer kann man 13 x 4 x 2π wahrlich nicht darstellen. Ishango, Gavrinis und Maya: Wir finden bei verschiedenen alten Kulturen Hinweise auf das Geheimnis der Primzahlen.

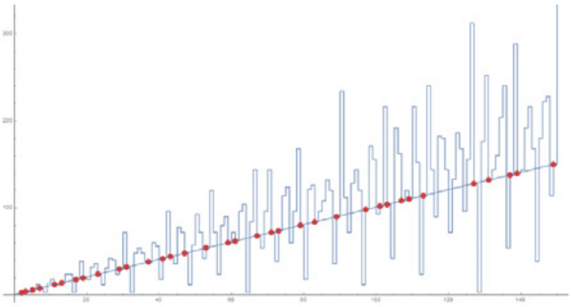


Abb. 6. Die Anzahl ganzzahliger Lösungen der Gleichung der Hypersphäre liegen für r^2 = Prim auf einer Gerade. Abbildung von Karl-Heinz Kuhl in «Primzahlen – Altbekanntes und Neues», Dezember 2018

8. Das Dodekaeder-Universum

Riemann beschäftigte sich nur am Rande mit der Zetafunktion und den Primzahlen. Im Jahr 1854 präsentierte er in seinem berühmten Habilitationsvortrag die Idee der vierdimensionalen gekrümmten Räume und ein neues Konzept von Kraft, das auf der Krümmung des Raumes basiert. Einsichten, die 60 Jahre später die Grundlage waren für Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie. Vierdimensionale Räume liegen jenseits unseres Anschauungsvermögens. Wir können es jedoch mit einer Analogie versuchen: Die Kugeloberfläche ist die zweidimensionale Oberfläche der dreidimensionalen Kugel. Entsprechend ist die sogenannte Hypersphäre oder 3-Sphäre die dreidimensionale «Oberfläche» einer vierdimensionalen Kugel. Die Kugeloberfläche im dreidimensionalen Raum hat die Gleichung $r^2=x^2+y^2+z^2$ (r ist der Radius), für die Hypersphäre im vierdimensionalen Raum braucht es eine Koordinate mehr: $r^2=x^2+y^2+z^2+t^2$. Wenn wir nun für jedes r^2 dieser Hypersphären-Gleichung die Anzahl ganzzahliger Lösungen bestimmen und als Funktionswert von r^2 auftragen, dann liegen diese Werte für alle r^2 = Prim (und nur für diese!) auf einer Geraden. Sehr schön aufgezeigt hat dies der Physiker Karl-Heinz Kuhl in seinem inspirierenden Buch über Primzahlen (Abb. 6).

Es ist eine besondere Fügung der Mathematikgeschichte, dass sich die Primzahlen nicht nur in der Riemannschen Zetafunktion, sondern auch in dem von Riemann eingeführten vierdimensionalen Raum auf einer Geraden offenbaren. Die Hyperspären-Gerade verdeutlicht die fundamentale Bedeutung der vierten Potenz oder Dimension für die Mathematik, die Physik und damit für unser Universum. Auch die Lichtgeschwindigkeit erscheint sowohl in Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ (p ist der Impuls, das bekanntere $E = mc^2$ gilt nur für die Ruhemasse) als auch in den Einsteinschen Feldgleichungen ($8\pi G / c^4$) in der vierten Dimension.

Und wie könnte ein vierdimensionales Universum aussehen? Die Hypersphäre, wie von Riemann und Einstein vorgeschlagen, ist nur eines von vielen möglichen Modellen. Wir unterscheiden zwischen Modellen mit euklidischer, sphärischer und hyperbolischer Geometrie. Aufgrund der Analyse der Kosmischen Hintergrundstrahlung stellten der französische Forscher Jean-Pierre Luminet und seine Kollegen 2003 in der Fachzeitschrift «nature» die Hypothese auf, das Universum sei das dreidimensionale Analogon einer Dodekaeder-Oberfläche mit leicht sphärisch gekrümmten Kanten, der sogenannte «Poincaré-Dodekaeder-Raum». Dieser Raum wäre also die dreidimensionale «Oberfläche» des vierdimensionalen Universums und wie bei der Hypersphäre wäre er zwar endlich, aber ohne Grenzen (mehr dazu auf arxiv.org und in Die Form des Weltraums, Bild der Wissenschaft 9 | 2011). Ein Universum aus vier Raumdimensionen und einer Zeitdimension hat bereits 1919 der Physiker Theodor Kaluza vorgeschlagen. Einstein schrieb an Kaluza: «Ich habe grossen Respekt vor der Schönheit und Kühnheit Ihres Gedankens». Nur sechs Jahre später führte der Physiker Wolfgang Pauli die vierte Dimension in die Quantenwelt ein. Er erkannte, dass es für die vollständige Beschreibung des gebundenen Elektrons im Wasserstoff-Atom vier Freiheitsgrade oder Quantenzahlen braucht. Auch moderne Theorien zur Beschreibung der Grundkräfte im Universum arbeiten mit vier Raumdimensionen (wie die Modelle von Lisa Randall und Raman Sundrum).

Zurück zu den Ishango-Knochen. Die mittlere Spalte des kurzen Ishango-Knochens mit der «Section d’Or» kann auch wie folgt gelesen werden:

108 = 9 x 12
360 = 90 x 4
12 = 5 + 7

Oder in Worten: Wir schreiben den 108-Grad-Winkel in einen Kreis ein und erhalten so das Pen-

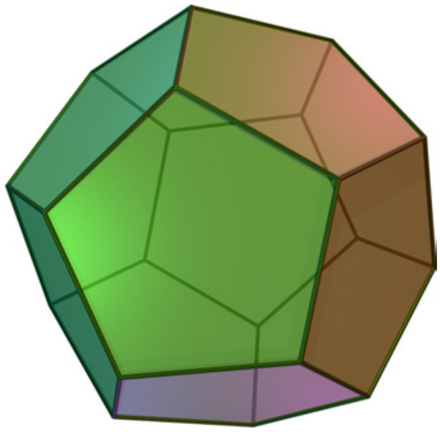


Abb. 7. Der Pentagondodekaeder als universelles Ordnungsprinzip. Der Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli beschrieb Mitte des 19. Jahrhunderts in seinem bahnbrechenden Werk «Theorie der vielfachen Kontinuität» erstmals den Dodekaeder in 4 Dimensionen bestehend aus 600 Ecken, 1200 Kanten, 720 Fünfecken und 120 Dodekaedern. Foto Wikipedia

tagon. Dann setzen wir 12 Pentagone zu einem Dodekaeder zusammen. In Pentagon und Dodekaeder finden wir zahlreiche goldene Verhältnisse und goldene Winkel. Hier sind sie alle wieder versammelt, die Zahlen der «Section d'Or». Verweist uns somit der kurze Ishango-Knochen über die Primzahlen hinaus auf die Dodekaeder-Form des Universums? Gibt es vielleicht neben der Kosmischen Hindergrundstrahlung weitere Hinweise auf die Dodekaeder-Natur unserer Welt? Wechseln wir vom Universum zu den Atomen, vom Makro- zum Mikrokosmos, und beschäftigen uns nochmals mit der magischen Formel von Balmer (in der von Rydberg verallgemeinerten Form):

$$\lambda = A \times m^2 / (m^2 - n^2)$$

Es ist die Formel hinter den Wellenlängen des Wasserstoffatoms, aus dem alle weiteren Atome entstanden sind. Und es ist die Formel, welche die Grundlage lieferte für das Atommodel von Niels Bohr, wie dieser selber schrieb: «As soon as I saw Balmer's formula the whole thing was immediately clear to me.» Präzis nachgezeichnet wird Balmers Arbeit von Helmut Reis in seiner Schrift «100 Jahre Balmerformel». Reis selber erkennt und beschreibt in seiner Jubiläumsschrift den Zusammenhang zwischen der Balmerformel und dem Dodekaeder, wie er in der Kristallwelt zu finden ist (das Pentagon ist hier nicht gleichseitig, eine Seite ist leicht verkürzt). Beim Studium der Längenverhältnisse dieses sogenannten Pyrit-Dodekaeders mit der kristallografischen Bezeichnung {hk0} fand Reis die gleichen Zahlenwerte, die der Ausdruck $m^2 / (m^2 - n^2)$ liefert. Es gibt kein zweites Beispiel für das Auftreten dieser Verhältnisse in der Kristallwelt. Und wenn wir für die äussere Begrenzungskugel dieses kristallinen Dodekaeders den Einheitsradius 1 annehmen, beträgt der Radius der Innenkugel Wurzel aus $h^2 / (h^2 - k^2)$. Der Zusammenhang zwischen Dodekaeder und Balmerformel wird damit offensichtlich. Liegt das Dodekaeder als Ordnungsprinzip sowohl dem Universum als auch dem Wasserstoffatom zugrunde? Schon der griechische Philosoph Platon schrieb in «Timaios», seinem Werk über das Wesen des Kosmos und der menschlichen Seele, dass der Schöpfer die ganze Welt in Form eines Dodekaeders angelegt hat.

Machen wir uns nun weiter auf unserer Reise durch das Land der goldenen Verhältnisse. Die «Section d'Or» führte uns zuerst zur Helixstruktur der Primzahlen und dann zur Dodekaeder-Natur von Universum und Wasserstoffatom. Im nächsten Kapitel entdecken wir die goldenen Verhältnisse der DNS-Doppelhelix und deren überraschende Verwandtschaft mit dem Dodekaeder.

9. Die kosmische Ordnung

Unser Universum ist ein grosses Buch, das in der Sprache der Mathematik geschrieben ist, meinte Galilei. «Alles ist Zahl», hiess es bei den Pythagoreern, die glaubten, durch Versenkung in das Reich der Zahlen den Zugang zum Transzendenten, dem grossen Ganzen zu finden. Noch einen Schritt weiter geht der Kosmologe Max Tegmark mit seiner «Mathematical Universe Hypothesis»: Das Universum wird nicht nur durch Mathematik beschrieben, es ist selbst Mathematik. Es ist also ganz wunderbar, aber nicht wirklich verwunderlich, dass die Primzahlen als Spirale organisiert sind. Die Spirale ist ein universelles Ordnungsprinzip von der DNS-Doppelhelix über das Gehäuse der Nautilusmuschel bis zu den Galaxien des Universums. Beim Gehäuse des Nautilus handelt es sich um die logarithmische Spirale, von Jakob Bernoulli auch als «spira mirabilis» (wundersame Spirale) bezeichnet. Ein Sonderfall der logarithmischen Spirale ist die Goldene Spirale, die sich aus den Fibonacci-Zahlen entwickeln lässt. Die Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... entsteht, indem wir mit zweimal der Eins beginnen und rekursiv für jede neue Zahl die beiden vorangehenden addieren. Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich dem Goldenen Schnitt an. Fibonacci-Zahlen, Goldener Schnitt, Kugel, Dodekaeder und Spirale sind zusammen mit Rekursion, Selbstähnlichkeit und Symmetrie die grundlegenden mathematischen Ordnungsprinzipien der Natur.

Mit der Symmetrie befasst sich die mathematische Disziplin der Gruppentheorie. Auch hier nimmt der Dodekaeder eine Sonderstellung ein: Seine Drehgruppe, die sogenannte A_5-Gruppe, ist mit 60 Elementen die kleinste nichtabelsche einfache Gruppe und die kleinste nicht-auflösbare Gruppe. Mathematische Symmetrien sind der Schlüssel für das

Verständnis unserer Welt, sie sind die «poetische Essenz des Weltalls», wie Edgar Allan Poe es in «Heureka» so wunderbar formulierte. Wir können auch darüber spekulieren, ob das Standardmodell der Teilchenphysik mit den mathematischen Symmetrien der Oktonionen beschrieben werden kann. Die kanadische Physikerin, Mathematikerin und leidenschaftliche Akkordeonistin Cohl Furey ist überzeugt davon, dass unsere Welt von oktonionischer Natur ist, wie das schöne Porträt im Quanta Magazine zeigt.

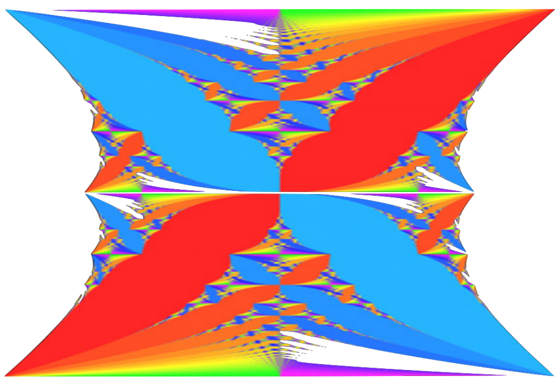
Es war die brillante Biochemikerin Rosalind Franklin, welche die Helixstruktur der DNS mit Hilfe der Röntgenstrukturanalyse erstmals sichtbar machte und damit die Grundlage lieferte für das Modell von Watson und Crick. In der DNS-Doppelhelix finden wir überraschenderweise auch den Goldenen Schnitt: Die Basenpaare sind jeweils um 36 Grad gegeneinander gedreht und teilen so von oben betrachtet den Kreis in genau 10 Dreiecke. Diese Dreiecke haben die Winkel 36 und zweimal 72 Grad, deren Seiten stehen also im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander. Der Goldene Schnitt ist der naheliegende Grund dafür, warum es genau zehn und nicht eine andere Anzahl von Basenpaaren pro Umdrehung gibt. Wir finden also die Zahl Zehn in der DNS-Doppelhelix, der Grundlage unseres Lebens. Und Zehn ist, wie wir gesehen haben, die Grundlage der Primzahl-Doppelhelix mit den beiden Ausgangszahlen 9 und 11 (10 +/– 1) sowie den 10er-Schritten im Zähler und Nenner (siehe Skizze im Anhang). Interessant ist weiter, dass die beiden universellen Raumstrukturen DNS und Dodekaeder miteinander verwandt sind: Bei der DNS sind die Basenpaare, beim Dodekaeder die gegenüberliegenden Fünfecke um je 36 Grad gegeneinander gedreht. Zwei gegenüberliegende Fünfecke bilden wie zehn Basen der DNS-Doppelhelix in der Projektion ein Zehneck aus zehn Goldenen Dreiecken. Die goldenen Verhältnisse im Zehneck sind auch ein möglicher Grund für die Anzahl unserer Finger und damit für die Entwicklung des Dezimalsystems.

Bevor wir zu den Schmetterlingen kommen, noch etwas Zahlenmystik oder eine kurze Geschichte des Lebens. Wie wir gesehen haben, ist die geheimnisvolle Zahl 19 der Ausgangspunkt zur Berechnung der Primzahl-Doppelhelix: $19 + 5 + 7 = 31$. Sie vermittelt zudem zwischen der vierten Dimension und der dezimalen Welt: $3^4 + 19 = 100$. Beim Bruch 1/19 finden wir seltsamerweise genau den Wert 3^4 als Summe der Ziffern der Periode. Und von hinten gelesen (und jeweils mit Übertrag) entspricht diese 18-stellige Periode der geometrischen Folge 1, 2, 4, 8, 16..., nach der viele Wachstumsprozesse ablaufen. Die Zahl 19 und ihr reziproker Wert stehen also für die Doppelhelix und das Zellwachstum, den beiden fundamentalen Prinzipien des Lebens. Auch der Menton-Zyklus dauert fast genau 19 Sonnenjahre. Dieser Lunisolarzyklus war schon im Altertum bekannt und ist vielleicht der Grund für die Bedeutung der Zahl 19 in der arabischen Zahlenmystik. Wem das alles etwas numerologisch vorkommt, lese den tiefsinnigen Artikel «Alles rechnet sich» von George Szpiro über das Thema Numerologie im empfehlenswerten NZZ-Folio über den Aberglauben.

Bekannt wurde Hofstadter neben seinem Werk «Gödel, Escher, Bach» auch als Entdecker des nach ihm benannten Hofstadter Schmetterlings, ein wunderschönes selbstähnliches Fraktal in Form eines Schmetterlings (Abb. 8). Dieser Schmetterling visualisiert, wie die Natur damit umgeht, wenn die kontinuierlichen Energieniveaus von Elektronen in einem Kristallgitter mit den diskreten Energieniveaus von Elektronen in einem Magnetfeld zusammentreffen. Die Lösung offenbart sich, wenn der entscheidende Parameter in einem Kettenbruch expandiert wird. Hofstadters fraktaler Schmetterling widerspiegelt somit das Zusammentreffen von kontinuierlichen und diskreten Welten.

Physik ist die Geschichte von der unendlichen Teilbarkeit des Raumes und der endlichen Teilbarkeit der Materie, wie sie uns Harald Lesch in seinem Beitrag «Die grosse Krise der Physik» anschaulich erzählt. Die Suche nach der Weltformel ist die Suche nach dem gemeinsamen Ursprung von kontinuierlicher Gravitation und diskreter Quantenmechanik. Albert Einstein hat sein Leben lang vergeblich danach gesucht. Gibt es diesen gemeinsamen Ursprung überhaupt? Vielleicht ist die Welt in ihrem tiefsten Grunde von dualistischer Natur und ihre diskreten und kontinuierlichen Teile sind so verschachtelt wie Benoît Mandelbrots Fraktale. Hinweise auf die fraktale Natur der Vereinigung von Raumzeit und Materie finden wir auch bei der «asymptotischen Sicherheit», einer Theorie der Quantengravitation. Das, was wir heute angestrengt als Weltformel suchen, flattert uns vielleicht fröhlich als Schmetterling der Gattung Hofstadter um die Ohren.

Abb. 8. Unendlich viele Unendlichkeiten. Der fraktale Schmetterling von Douglas Hofstadter, 1975. Foto Wikipedia/Mytomi



10. Hen kai pan

Wir haben es bei den Ishango-Knochen mit einem klassischen Out-of-place-Artefakt zu tun, da das Vorhandensein eines abstrakten Zahlbegriffes vor der Jungsteinzeit nicht anzunehmen ist. Doch Vorsicht! Wir haben die Tendenz, unsere Vorfahren systematisch zu unterschätzen, wie etwa die Bagdad-Batterie und das vielleicht berühmteste Out-of-place-Artefakt, der Mechanismus von Antikythera, zeigen. Diese geniale Uhr stammt aus einer Zeit, von der man lange annahm, sie habe vor dem Beginn der technischen Entwicklung gelegen. Mit der Uhr lässt sich auch der 19-jährige Meton-Zyklus darstellen, den wir weiter oben kennengelernt haben. Hatte auch das Volk von Ishango bereits herausragende mathematische Kenntnisse? Woher kam dieses Wissen und an wen wurde es weitergegeben? Afrika ist die Wiege der Menschheit. Hier auch die Wiege der Mathematik zu vermuten fällt nicht schwer, ganz besonders, wenn man die Sona-Geometrie oder die differenzierten mathematischen Strukturen der Musik Zentralafrikas kennt (siehe dazu den Artikel «Musik in Zentralafrika» im Spezial «Ethnomathematik 2/2006» von «Spektrum der Wissenschaft»).

Oder handelt es sich bei der Autorin der Ishango-Knochen vielleicht einfach um eine einsame geniale Mathematikerin wie es sie immer wieder gab – von Euler über Gauss bis Ramanujan? Auch Albert Einstein hatte Einsichten wie von einem anderen Stern, wie es sehr schön der Cartoon zum Ausdruck bringt, der am Tag nach seinem Tod in der Washington Post erschien. Seine Einsichten zur Speziellen Relativitätstheorie hatte er dabei fernab des akademischen Betriebs während seiner Tätigkeit für das Schweizer Patentamt in Bern als «ehrwürdiger eidgenössischer Tintenscheisser», wie er sich einmal selbst bezeichnete. Immer wieder haben Wanderer am Weltenrand Zugang zu tieferen Wahrheiten einer anderen Dimension gefunden. In früheren Zeiten können dabei auch tranceähnliche Zustände mit Hilfe von Tanz, Musik und Drogen geholfen haben, wie wir dies etwa von den Maya kennen.

Last but not least: Wir können und wollen auch nicht ausschliessen, dass freundliche Aliens bei ihrem Besuch auf der Erde uns die Ishango-Knochen hinterlassen oder Gavrinis gebaut haben. Vielleicht sind uns die ausserirdischen Besucherinnen bei der Baukultur und in den Wissenschaften mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Etwa bei der Einteilung des Tages in 24 Stunden sowie 60 Minuten und Sekunden. Diese beiden Zahlen sind die einzigen Muster, welche den Fibonacci-Zahlen zugrunde liegen: Wiederholung der einstelligen Quersummen alle 24 und der Endziffern alle 60 Zahlen. Letzteres Muster wurde erst 1774 vom französischen Mathematiker Joseph-Louis Lagrange (wieder)entdeckt.

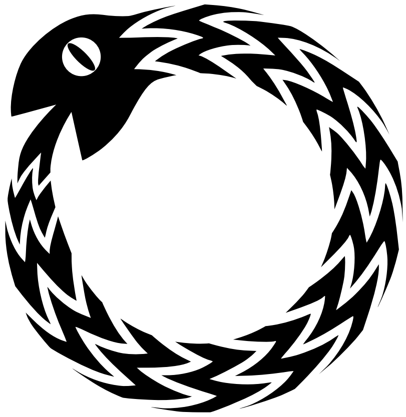


Abb. 9. Der Ouroboros steht für die kosmische Einheit, für die Entsprechung von Mikro- und Makrokosmos. Foto Wikipedia/Zanaq

---

Universum und Wasserstoffatom, DNS und Dodekaeder: Viele Dinge hängen auf eine geheimnisvolle Art und Weise zusammen. Es ist die unteilbare Einheit des Seins oder wie es die Griechen nannten: *hen kai pan*. «Alles ist durch geheime Knoten miteinander verbunden», schrieb 1654 der Universalgelehrte Athanasius Kircher. Dies ist als Prinzip leicht zu erkennen, im Einzelnen aber schwer zu ergründen. Es ist die ewige Leidenschaft der Menschen, diesen Zusammenhängen auf den Grund zu gehen. Wir selber sind nun aber fast am Ende unseres mathematischen Spazierganges. Nachdem Marquis de Laplace zu Beginn des 19. Jahrhunderts noch behauptet hatte, das Universum sei vollständig deterministisch, machten in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts die Wahrscheinlichkeitsinterpretation von Max Born, die Unbestimmtheitsrelation von Werner Heisenberg sowie der Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel dem Laplace'schen Traum von einem deterministischen Modell des Universums ein Ende. Die Primzahl-Doppelhelix ist ein schönes Abbild und vielleicht auch der Grund dieser Welt zwischen Determinismus und Unbestimmtheit: Die Ordnungszahlen der Doppelhelix lassen sich nach einer Formel berechnen; die paarweise durch die Ordnungszahlen definierten Primzahlen, die doppelten Lottchen, sind analytisch jedoch nicht bestimmbar. Determinismus und Unbestimmtheit: eng umschlungen tanzt das Paar durch die Nacht. Es ist der Tanz von Ishango.

above the fields –
detached from everything
a skylark sings

Matsuo Bashō (Übersetzung CB)

Literaturempfehlungen

The Prime Number Double Helix

$$\frac{\overbrace{(19+5+7)}^{31}\cdot\mathbf{9}-19}{\mathbf{20}}=13$$

$$\frac{\overbrace{(31+11+13)}^{55}\cdot\mathbf{11}-31}{\mathbf{20}}=28.7$$

$$13\cdot\mathbf{P}=\underline{11\ (13}+1)$$

$$28.7\cdot\mathbf{P}=\underline{17\cdot(19}+1)$$

$$K_1=\frac{31^2+(9^2-11^2)-0}{0+13}$$

$$K_2=\frac{55^2+(11^2-9^2)-13}{13+28.7}$$

$$\frac{\overbrace{(55+17+19)}^{91}\cdot\mathbf{19}-55+K_2}{\mathbf{30}}=58.24$$

$$\frac{\overbrace{(91+23+29)}^{143}\cdot\mathbf{21}-91+K_1}{\mathbf{30}}=99.43$$

$$58.24\cdot\mathbf{P}=23\cdot(29+1)$$

$$99.43\cdot\mathbf{P}=31\cdot(37+1)$$

$$\frac{\overbrace{(143+31+37)}^{211}\cdot\mathbf{29}-143+K_4}{\mathbf{40}}=152.26$$

$$\frac{\overbrace{(211+41+43)}^{295}\cdot\mathbf{31}-211+K_3}{\mathbf{40}}=214.22$$

$$152.26\cdot\mathbf{P}=41\cdot(43+1)$$

$$214.22\cdot\mathbf{P}=47\cdot(53+1)$$

Ishango Bone I

11 13 **17 19**

11 21 **19 9**

Ishango Bone II

$19+5+7=31$

$$\mathbf{P}=4/3\cdot\pi\cdot\sqrt{8}$$

CB 9.9.19